

УДК 519.10

**АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ГРАДИЕНТНОГО АЛГОРИТМА
ДЛЯ ОБСЛУЖИВАЮЩИХ СИСТЕМ СО ШТРАФОМ****А.Б.РАМАЗАНОВ***Бакинский Государственный Университет**ram-bsu@mail.ru*

В настоящей работе анализируется устойчивость градиентного алгоритма для задачи обслуживания сетевых систем при малых возмущениях штрафов и приоритетности запросов.

Ключевые слова: устойчивость, градиент, дискрет, система, приоритетность.

Задача обслуживания сети имеют многочисленные применения. Как обычно, (см., напр., [1]) задачи обслуживания формулируются в ограниченных ресурсах и требуется, чтобы были выполнены те запросы, которые наиболее ценны по сравнению с другим. Аналогичная задача возникает и в задачах нахождения информативности признаков в распознавании образов (см., напр., [2]). Обычно, запросы составляет дискретное (элементы изолированы) множество. В таком случае получается дискретная задача оптимизации. Хорошо известно, что задача оптимизации с дискретными переменными трудно решаемые задачи. Так как для их решения не всегда существует эффективный точный алгоритм. Поэтому для соответствующих задач применяют приближенные (градиентные) алгоритмы, которые решают исходную задачу, но не всегда гарантируют получения оптимального решения. То есть, возникает проблема сохранить инвариантность градиентных алгоритмов при малых возмущениях (колебаниях) параметров задачи. Другими словами, исследуется устойчивость градиентного алгоритма. На основе такого подхода получен ряд новых результатов [3, 4].

В настоящей работе анализируется устойчивость градиентного алгоритма для задачи обслуживания сетевых систем при малых возмущениях штрафов и приоритетности запросов.

Постановка задачи

Пусть Z_+^n (R_+^n) - множество n -мерных неотрицательных целочис-

ленных (действительных) векторов. Множество $P \subseteq Z_+^n$ обладает свойствами:

- 1). $0 = (0, \dots, 0) \in P$;
- 2). $|P| < +\infty$;
- 3). $[0, x] = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in Z_+^n : 0 \leq z \leq x\} \subseteq P, \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in P$.

Рассмотрим задачу

$$f(x) = \sum_{i=1}^n c_i x_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^2 \rightarrow \max, \quad (1)$$

где $x \in P, c = (c_1, \dots, c_n), \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in R_+^n$

В задаче (1) предполагается, что

$$\begin{aligned} c_i - \alpha_i x_i - \alpha_i / 2 &\geq 0, \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in P, \\ \forall i \in \text{fes}(x, P) &= \{i \in N = \{1, \dots, n\} : \pi_i(x) \in P, x \in P\}, \\ \pi_i(x) &= (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + 1, x_{i+1}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Пусть $x^g = (x_1^g, \dots, x_n^g)$ и $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ соответственно градиентное (т.е. решение, построенное с помощью градиентного алгоритма по координатного алгоритма (см., напр., [1, 3])) и оптимальное решение задачи (1).

Обычно, задача (1) в сетевых системах обслуживания интерпретируется следующим образом. Поступает систему n запросов соответственно с приоритетностью (ценностью) c_1, \dots, c_n . Необходимо выполнить те запросы, которые имеет максимальную суммарную значение. Так как ресурсы ограничены, то все запросы не выполняется. В таком случае за не выполнение i -го запроса система штрафует в размере $\alpha_i, i \in N$. Возникает следующая проблема. Те запросы, которые ранее выполнены, после возмущения вектора α остается ли, выполнимой. Это означает, что максимальная суммарная прибыль не ухудшается, т.е. градиентный алгоритм для решения задачи (1) устойчиво. Переходим математическую постановку задачи.

Пусть вектор $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ возмущается в пределах $(0, \delta)$, где $o = (0, \dots, 0), \delta = (\delta_1, \dots, \delta_n) \in R_+^n$. Получаем задачу:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n c_i x_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \delta_i) x_i^2 \rightarrow \max, \quad (2)$$

где $x \in P, c = (c_1, \dots, c_n), \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in R_+^n$

Как обычно (см., напр., [1, 3]), под гарантированной оценкой точности градиентного алгоритма для задачи (1) понимается такое число $\varepsilon \geq 0$, что

$$\frac{f(x^*) - f(x^g)}{f(x^*) - f(0)} \leq \varepsilon$$

Через $\varepsilon(\delta)$ обозначим гарантированную оценку точности градиентного алгоритма для задачи (2). Градиентный алгоритм будем называть устойчивым для задачи (1), если $\varepsilon(\delta) \leq K(\delta)\varepsilon$, где $K(\delta) \rightarrow 1$ при $\delta \rightarrow 0$ (см., напр., [3]).

Пусть вектор $c = (c_1, \dots, c_n)$ возмущается в пределах $(0, q)$, где $o = (0, \dots, 0)$, $q = (q_1, \dots, q_n) \in R_+^n$. Получаем следующую задачу:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n (c_i + q_i)x_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^2 \rightarrow \max, \quad (3)$$

где $x \in P$, $c = (c_1, \dots, c_n)$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in R_+^n$.

Через $\varepsilon(q)$ обозначим гарантированную оценку точности градиентного алгоритма для задачи (3). Градиентный алгоритм будем называть не устойчивым для задачи (1), если $\varepsilon(q) > \varepsilon$. В задачах (2), (3) соответственно предполагается, что

$$\begin{aligned} c_i - (\alpha_i + \delta_i)x_i - (\alpha_i + \delta_i)/2 &\geq 0, \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in P, \quad \forall i \in \text{fes}(x, P), \\ (c_i + q_i) - \alpha_i x_i - \alpha_i/2 &\geq 0, \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in P, \quad \forall i \in \text{fes}(x, P). \end{aligned}$$

Основные результаты

Приведем основные результаты данной работы.

Теорема 1. При малых возмущениях (колебаниях) вектора $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ в задаче (1) градиентный алгоритм устойчив.

Теорема 2. При малых возмущениях (колебаниях) вектора $c = (c_1, \dots, c_n)$ в задаче (1) градиентный алгоритм не устойчив.

Для доказательства теорем 1 и 2 нам понадобится следующая лемма.

Лемма [3]. В задаче (1) справедливо следующая гарантированная оценка точности градиентного алгоритма

$$\varepsilon = \left(1 - \frac{1}{1 + (1 - k_1)(h - 1)} \right)^r,$$

где

$$\begin{aligned} h &= \max\{x_1 + \dots + x_n : x = (x_1, \dots, x_n) \in P\}, \\ r &= \min\{x_1 + \dots + x_n : \text{fes}(x, P) = \emptyset, x = (x_1, \dots, x_n) \in P\}, \\ k_1 &= \min_i \left\{ \frac{2\alpha_i}{2c_i - \alpha_i} : i \in \text{fes}(0, P) \right\}. \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 1. Из леммы, соответственно, для задачи (1) и (2), имеем

$$\varepsilon = \left(1 - \frac{1}{1 + (1 - k_1)(h - 1)} \right)^r,$$

$$\varepsilon(\delta) = \left(1 - \frac{1}{1 + (1 - k_2)(h - 1)} \right)^r,$$

где

$$k_2 = \min_i \left\{ \frac{2(\alpha_i + \delta_i)}{2c_i - (\alpha_i + \delta_i)}, i \in \text{fes}(0, P) \right\}.$$

Отсюда, учитывая, что

$$\frac{2\alpha_i}{2c_i - \alpha_i} \leq \frac{2(\alpha_i + \delta_i)}{2c_i - \alpha_i} \leq \frac{2(\alpha_i + \delta_i)}{2c_i - (\alpha_i + \delta_i)}, \forall i \in \text{fes}(0, P),$$

имеем

$$k_1 = \min_i \left\{ \frac{2\alpha_i}{2c_i - \alpha_i} : i \in \text{fes}(0, P) \right\} \leq \frac{2\alpha_i}{2c_i - \alpha_i} \leq \frac{2(\alpha_i + \delta_i)}{2c_i - (\alpha_i + \delta_i)}, \forall i \in \text{fes}(0, P)$$

Отсюда, находим

$$k_1 = \min_i \left\{ \frac{2\alpha_i}{2c_i - \alpha_i} : i \in \text{fes}(0, P) \right\} \leq \min_i \left\{ \frac{2(\alpha_i + \delta_i)}{2c_i - (\alpha_i + \delta_i)}, i \in \text{fes}(0, P) \right\} = k_2$$

Тогда из цепочки неравенств, получаем

$$1 - k_1 \geq 1 - k_2, 1 + (1 - k_1)(h - 1) \geq 1 + (1 - k_2)(h - 1),$$

$$\frac{1}{1 + (1 - k_1)(h - 1)} \leq \frac{1}{1 + (1 - k_2)(h - 1)},$$

$$1 - \frac{1}{1 + (1 - k_1)(h - 1)} \geq 1 - \frac{1}{1 + (1 - k_2)(h - 1)}.$$

Поэтому

$$\varepsilon = \left(1 - \frac{1}{1 + (1 - k_1)(h - 1)} \right)^r \geq \left(1 - \frac{1}{1 + (1 - k_2)(h - 1)} \right)^r = \varepsilon(\delta).$$

То есть $\varepsilon(\delta) \leq \varepsilon$.

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Из леммы, соответственно, для задачи (1) и (3) имеем

$$\varepsilon = \left(1 - \frac{1}{1 + (1 - k_1)(h - 1)} \right)^r,$$

$$\varepsilon(q) = \left(1 - \frac{1}{1 + (1 - k_3)(h - 1)} \right)^r,$$

где

$$k_3 = \min_i \left\{ \frac{2\alpha_i}{2(c_i + q_i) - \alpha_i} : i \in \text{fes}(0, P) \right\}.$$

Отсюда, учитывая, что

$$\frac{2\alpha_i}{2(c_i + q_i) - \alpha_i} < \frac{2\alpha_i}{2c_i - \alpha_i}, \forall i \in \text{fes}(0, P),$$

имеем

$$k_3 = \min_i \left\{ \frac{2\alpha_i}{2(c_i + q_i) - \alpha_i} : i \in \text{fes}(0, P) \right\} < \frac{2\alpha_i}{2c_i - \alpha_i}, \forall i \in \text{fes}(0, P). \quad (4)$$

Поэтому (в силу того, что неравенства (4) выполняются для любого $i \in \text{fes}(0, P)$)

$$k_3 = \min_i \left\{ \frac{2\alpha_i}{2(c_i + q_i) - \alpha_i} : i \in \text{fes}(0, P) \right\} < \min_i \left\{ \frac{2\alpha_i}{2c_i - \alpha_i} : i \in \text{fes}(0, P) \right\} = k_1$$

Тогда из цепочки неравенств, получаем

$$1 - k_1 < 1 - k_3, 1 + (1 - k_1)(h - 1) < 1 + (1 - k_3)(h - 1),$$

$$\frac{1}{1 + (1 - k_1)(h - 1)} > \frac{1}{1 + (1 - k_3)(h - 1)},$$

$$1 - \frac{1}{1 + (1 - k_1)(h - 1)} < 1 - \frac{1}{1 + (1 - k_3)(h - 1)}.$$

Поэтому

$$\varepsilon = \left(1 - \frac{1}{1 + (1 - k_1)(h - 1)} \right)^r < \left(1 - \frac{1}{1 + (1 - k_3)(h - 1)} \right)^r = \varepsilon(q)$$

То есть $\varepsilon(q) > \varepsilon$.

Теорема 2 доказана.

Примеры

Приведем примеры для теоремы 1 и 2.

Пример 1. Пусть

$$f(x) = -x_1^2 + 4x_1 - x_2^2 / 2 + 3x_2 \rightarrow \max,$$

$$x \in P = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0)\},$$

$$\alpha = (2,1), \delta = (0.1, 0.2).$$

Тогда получаем задачу

$$f_{\delta}(x) = -2.1x_1^2 / 2 + 4x_1 - 1.2x_2^2 / 2 + 3x_2 \rightarrow \max,$$

$$x \in P = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0)\}$$

Находим

$$k_1 = \min\{2/3, 1/2.5\} = 2/5,$$

$$k_2 = \min\{2.1/((5.9)/2), 1.2/2.4\} = 1/2$$

Не трудно видеть, что

$$h = 2, r = 1,$$

$$\varepsilon = 1 - \frac{1}{1 + (1 - k_1)(h - 1)} = 3/8,$$

$$\varepsilon(\delta) = 1/3.$$

То есть $\varepsilon(\delta) < \varepsilon$.

Пример 2. Пусть

$$f(x) = -x_1^2 + 4x_1 - x_2^2 / 2 + 3x_2 \rightarrow \max,$$

$$x \in P = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0)\},$$

$$c = (4,3), q = (0.1, 0.2), \alpha = (2,1)$$

Тогда получаем задачу

$$f_q(x) = -x_1^2 + 4.1x_1 - x_2^2 / 2 + 3.2x_2 \rightarrow \max,$$

$$x \in P = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0)\}$$

Находим

$$k_1 = \min\{2/3, 1/2.5\} = 2/5,$$

$$k_3 = \min\{4/((8 + 0.2) - 2), 2/((6 + 0.4) - 1)\} =$$

$$\min\{4/6.2, 2/5.4\} = 2/5.4 = 1/2.7$$

Поэтому

$$h = 2, r = 1,$$

$$\varepsilon = 1 - \frac{1}{1 + (1 - k_1)(h - 1)} = 3/8,$$

$$\varepsilon(q) = 1 - \frac{1}{1 + 1.7/2.7} = 1 - \frac{2.7}{4.4} = \frac{1.7}{4.4} = \frac{17}{44},$$

$$\varepsilon < \varepsilon(q)$$

Тем самым при возмущении приоритетности запросов градиентный алгоритм в терминах гарантированных оценок не устойчив.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ковалев М.М. Матроиды в дискретной оптимизации. Минск, 1987, 222 с.
2. Мазуров В.Д. Метод комитетов в задачах оптимизации и классификации. М.: Наука, 1990, 248 с.
3. Ramazanov A.B. On Stability of the Gradient Algorithm in Convex Discrete Optimization

Problems and Related Questions. // Discrete Mathematics and Applications. 2011, v. 21, issue 4, p. 465-476.

4. Ramazanov A.B. The Analysis of Stability of Gradient Algorithm for Problems of Convex Discrete Optimization. // Mat.-s XVI Baikal International School-seminar "Optimization Methods and their Applications", Irkutsk, 2014, pp. 87-92.

QRADİYENT ALQORİTMİN CƏRİMƏLİ XİDMƏT SİSTEMLƏRİNDƏ DAYANIQLIĞININ ARAŞDIRILMASI

Ə.B.RAMAZANOV

XÜLASƏ

Xidmət sistemlərində cərimələrin kiçik həyacanlanmalarında qradiyent alqoritmin qarantiyalı xəta terminində dayanıqlığı göstərilmişdir. Sorğuların prioritetliyinin kiçik həyacanlanmalarında isə qradiyent alqoritmin qarantiyalı xəta terminində qeyri-dayanıq olduğu isbat edilmişdir. İsbat edilmiş teoremlərə misallar göstərilmişdir.

Acar şözlər: dayanıqlıq, qradiyent, diskret, sistem, prioritet.

ANALYSIS OF THE STABILITY OF THE GRADIENT ALGORITHM FOR SERVICE SYSTEMS WITH FINE

A.B. RAMAZANOV

SUMMARY

In service systems, the stability of the small changes in fines is shown by gradient algorithm with guaranteed errors. The instability of priorities of queries with small changes is also proved by gradient algorithm. The proven theorems are demonstrated by examples.

Key words: stability, gradient, discrete, system, priority.

Поступила в редакцию: 09.10.2014 г.

Подписано к печати: 26.11.2014 г.